



Stabilität – ein Problem im Holzbau?

*René Steiger
Dr. sc. techn. / Dipl. Bauing. ETH/SIA
Empa, Abt. Holz
Dübendorf, Schweiz*

Stabilität – Ein Problem im Holzbau?

Begriff „Stabilität“

Stabilität (von lat. stabilis = standhaft, stabil) ist die Fähigkeit eines Systems, nach einer Störung wieder in den Ausgangszustand zurückzukehren. Das Gegenteil der Stabilität ist die *Instabilität*. Ein schwacher Zustand der Stabilität wird als *Metastabilität* bezeichnet.

Physikalische Bedeutung von „Stabilität“ und „Standfestigkeit“

Die drei Gleichgewichtsarten

Es gibt in jedem Körper einen Punkt, der als Angriffspunkt der Schwerkraft betrachtet werden kann, den Schwerpunkt oder Massenmittelpunkt. Bei regelmässig geformten Flächen und Körpern aus einheitlichem Material fällt der Schwerpunkt mit dem geometrischen Mittelpunkt der Fläche oder des Körpers zusammen. Ein in seinem Schwerpunkt unterstützter Körper ist in jeder Lage im Gleichgewicht (Bild 1). Man spricht dann von einem *unbestimmten* oder *indifferenten* Gleichgewicht.

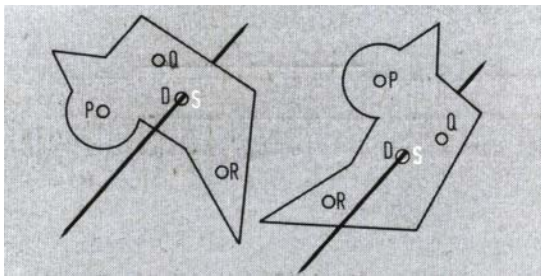


Bild 1: Ein um seinen Schwerpunkt drehbarer Körper befindet sich in jeder Lage im Gleichgewicht.

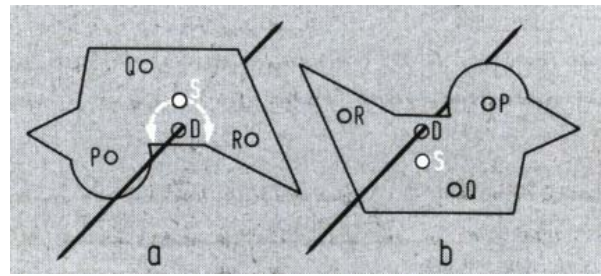


Bild 2: Labiler (a) und stabiler (b) Gleichgewichtszustand eines Körpers.

Der Körper in Bild 1 kann auch im Gleichgewicht sein, wenn er direkt unterhalb des Schwerpunkts gestützt wird (Bild 2). Allerdings kippt er in diesem Zustand bei einer kleinen Änderung der Lage um. Man spricht deshalb von einem *unsicheren* oder *labilen* Gleichgewicht. Der Körper nimmt eine neue Lage ein, bei welcher der Schwerpunkt in der Vertikalen unter dem Unterstützungspunkt liegt. Diese neue Lage ist stabil, denn wenn man den Körper ein wenig aus ihr entfernt, so kehrt er immer wieder in den Ausgangszustand zurück. Man bezeichnet diese Gleichgewichtslage deshalb als *sicheres* oder *stabiles* Gleichgewicht.

Die oben gegebene Definition für die verschiedenen Arten des Gleichgewichts gilt nur für spezielle Fälle. In Bild 3 liegt der Schwerpunkt der Kugel nämlich stets oberhalb des Unterstützungspunktes und trotzdem liegen verschiedene Gleichgewichtsarten vor. Allgemein gilt: Wenn bei einer kleinen Bewegung des Körpers aus seiner Gleichgewichtslage heraus der Schwerpunkt

- steigt, so liegt *stabiles* Gleichgewicht vor;
- sinkt, so liegt *labiles* Gleichgewicht vor;
- weder steigt noch sinkt, so liegt *indifferentes* Gleichgewicht vor.

Man erkennt sofort, dass die Kugel im Falle:

- a) durch ihre Gewichtskraft in ihre Gleichgewichtslage zurückkehrt;
- b) durch ihre Gewichtskraft weiter aus ihrer Gleichgewichtslage entfernt wird;
- c) sich stets im Gleichgewicht befindet, falls keine äusseren Einflüsse auftreten.

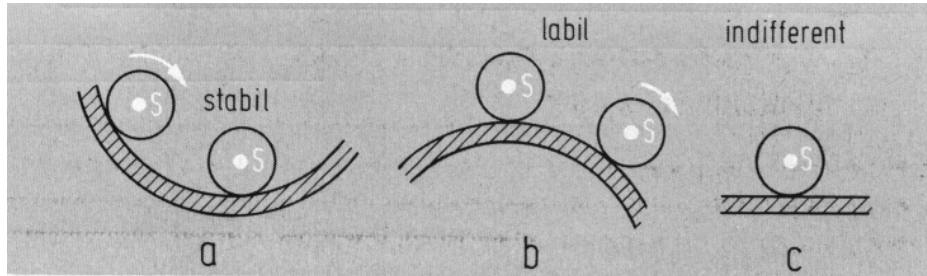


Bild 3: Drei verschiedene Arten des Gleichgewichts.

Ein frei beweglicher Körper nimmt also stets diejenige Stellung ein, bei der sein Schwerpunkt die tiefstmögliche Lage hat. Labile Gleichgewichtslagen können auch durch das Anbringen von Zusatzmassen stabilisiert werden (Bild 4).

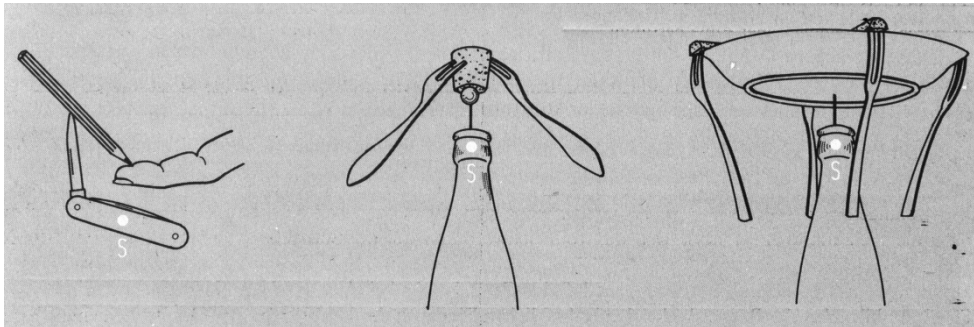


Bild 4: In allen abgebildeten Fällen liegt stabiles Gleichgewicht vor, weil sich der Gesamtschwerpunkt S unterhalb des Unterstützungspunktes befindet.

Um auch Gleichgewichtsbetrachtungen machen zu können, welche nicht ausschliesslich durch lotrecht wirkende Massekräfte beeinflusst werden (z. B. Knicken von Stäben), ist es von Vorteil, die jeweilige Gleichgewichtslage mit der zugehörigen potentiellen Energie E_p zu beschreiben. In den in Bild 5 gezeigten Lagen a), b) und c) ist die (graue) Kugel kräftefrei, weil der Gewichtskraft F_g eine gegengleiche Reaktionskraft der Unterlage das Gleichgewicht hält. In diesen Lagen besteht Gleichgewicht und die Kugel kann in Ruhe verharren. In der Lage d) wird der drückenden Komponente der Gewichtskraft F_g durch die schiefe Ebene das Gleichgewicht gehalten; die treibende Komponente F_T ist die vektorielle Differenz der auf den Körper wirkenden Kräfte F_D und F_g . Sie ist nicht Null und es besteht daher kein Gleichgewicht.

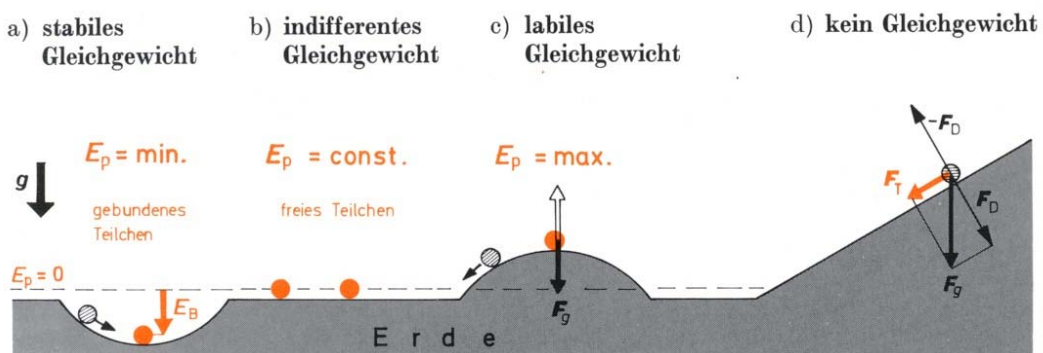


Bild 5: Gleichgewichtsarten eines Systems ruhender Körper.

Um die Kugel in Bild 5 aus der stabilen Gleichgewichtslage zu bringen, muss stets eine gewisse Arbeit verrichtet werden. Das System verlässt die stabile Gleichgewichtslage nicht von selbst, d. h. ohne dass dem System Energie zugeführt wird. Ein stabiles System ist ein *gebundenes* System. Als Bindungsenergie E_B bezeichnet man diejenige Energie, die mindestens nötig ist, um die Bindung aufzuheben. Die Bindungsenergie ist ein Mass für die Stabilität eines Systems, also für die Festigkeit einer Bindung. Ein gebundenes System wird durch Störungen, die nicht mindestens die Bindungsenergie zuführen, nicht zerstört. Es gilt für:

- Stabiles Gleichgewicht: Die potentielle Energie E_p hat ein Minimum, jede Veränderung erfordert Arbeit, erfolgt also nie von selbst.
- Indifferentes Gleichgewicht: Die potentielle Energie bleibt bei Lageänderungen konstant. Es ist keine bestimmte Lage ausgezeichnet.
- Labiles Gleichgewicht: Die potentielle Energie hat ein (relatives) Maximum. Bei jeder Veränderung kann potentielle Energie in Bewegungsenergie verwandelt werden.

Standfestigkeit

Damit ein Körper auf seiner Standfläche (Fundament) stabil bzw. *standfest* steht, muss das durch seinen Schwerpunkt gehende Lot innerhalb der Unterstützungsfläche enden (Bild 6). Bei einem Körper, der die Unterlage nur an einzelnen Punkten berührt, gilt als Unterstützungsfläche diejenige Fläche, welche sich ergibt, wenn man die am weitesten aussen liegenden Unterstützungspunkte durch gerade Linien miteinander verbindet. Die Standfestigkeit eines Körpers ist umso grösser, je grösser seine Standfläche ist, je grösser seine Gewichtskraft ist und je näher sein Schwerpunkt bei der Standfläche liegt (Bild 7).

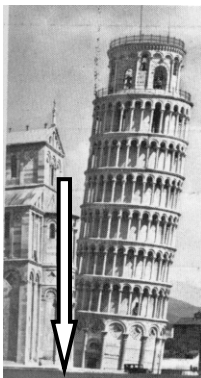


Bild 6: Schiefer Turm von Pisa.

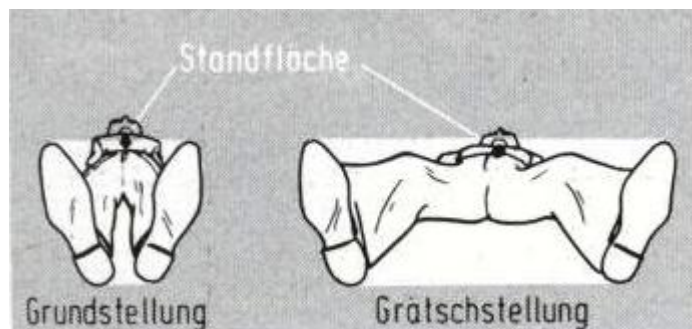


Bild 7: Die Standfestigkeit eines Menschen ist durch die Stellung seiner Füße bestimmt.

Bautechnische Bedeutung des Begriffs „Stabilität“

Bezug zum physikalischen Begriff

Ein Stabilitätsproblem ist dadurch gekennzeichnet, dass es für gewisse Tragzustände keine eindeutige Gleichgewichtslage mehr gibt, sondern deren zwei oder mehrere möglich sind.

Die Stabilitätsproblematik in Bau- und Tragwerken lässt sich anhand der Analogie eines Zweigelenkstabes und einer Kugel, die sich auf einer Oberfläche reibungsfrei bewegen kann, veranschaulichen (Bild 8): Der durch eine zentrisch in Stabrichtung wirkende Druckkraft N_1 beanspruchte, an beiden Enden gelenkig gelagerte Stab erfährt eine Störung seiner Gleichgewichtslage in Form einer seitlichen Auslenkung. Kehrt der Stab nach Wegfall der Störung in seine ursprüngliche Lage zurück, so wird sein Gleichgewichtszustand als *stabil* bezeichnet.

Bei einer bestimmten Druckkraft N_2 ($N_2 > N_1$) verbleibt der Stab auch nach Aufheben der Störung in der benachbarten Gleichgewichtslage. In diesem Fall liegt ein *indifferent* Gleichgewichtszustand vor. Die Druckkraft N_2 wird als *Euler'sche Knicklast* N_{cr} bezeichnet. Überschreitet die auf den Stab einwirkende Kraft N_3 den Wert N_{cr} , verlässt der Stab bei der geringsten Störung seine Ausgangslage und seine Verformungen nehmen stetig zu, ohne dass eine benachbarte Gleichgewichtslage erreicht wird: Das System befindet sich in einem *instabilen (labilen)* Gleichgewichtszustand. Die kritische Last N_{cr} ist durch den plötzlichen Übergang vom stabilen zum labilen Gleichgewichtszustand gekennzeichnet. Es findet eine sogenannte *Gleichgewichtsverzweigung* statt (Bild 8, rechts) und man bezeichnet N_{cr} deshalb auch als *Verzweigungslast*. Die Grösse der Stabauslenkung bleibt unbestimmt.

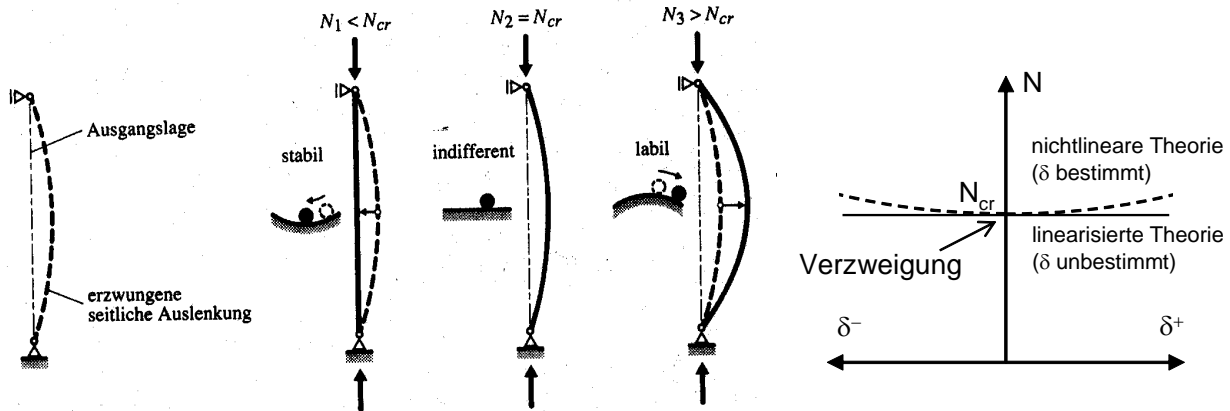


Bild 8: Stabilität eines Druckstabes mit Kraft-Verformungsdiagramm (rechts) [1].

Um den bei Stabilitätsproblemen auftretenden grossen Verformungen gerecht zu werden, kann man das Kräftegleichgewicht am verformten System formulieren und dabei die durch die exzentrisch wirkende Normalkraft initiierten Biegemomente („P-Delta-Effekt“) berücksichtigen. Weil die Beziehung zwischen herrschender Normalkraft N und resultierendem Biegemoment nichtlinear ist, spricht man von einem *Einfluss 2. Ordnung*. Der Einfluss- bzw. Vergrösserungsfaktor aus Normalkraft beträgt $1/(1-N/N_{cr})$ (1). N_{cr} ist, wie oben bereits erwähnt, die Euler'sche Knicklast:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot EJ}{\ell_k^2} \quad \ell_k = \text{Knicklänge} \quad (2)$$

Arten von Stabilitätsproblemen in Bau- und Tragwerken

Stabilitätsprobleme in Tragwerken lassen sich in die folgenden 2 Hauptgruppen einteilen:

- Gesamtstabilität von Bau- und Tragwerken
- Stabilität von Tragwerksteilen.

Unter Gesamtstabilität von Bau- und Tragwerken versteht man die stabile und standfeste Gleichgewichtslage des gesamten Tragwerks als starrer Körper. Die Stabilitätsprobleme von Teilen des Tragwerks (Biegeträger, Druckstäbe / Stützen, Bogen, Rahmen, Scheiben, Schalen, etc.) umfassen:

- Knicken, d.h. die Unstabilität längsgedrückter Stäbe durch seitliches Ausweichen (ohne Verdrehung)
- Kippen, d. h. die Unstabilität von Biegeträgern durch Verdrehung und seitliches Ausweichen der Biegedruckzone. Zu dieser Gruppe gehören ausserdem das Torsionsknicken sowie das Biegedrillknicken längsgedrückter Stäbe.
- Beulen, eine Unstabilitätsform platten- und scheibenförmiger dünnwandiger Elemente. In diese Gruppe kann auch das Durchschlagen von Schalen eingeteilt werden.

Imperfektion

Reale Bauteile sind stets mit unvermeidlichen Imperfektionen behaftet. Dazu gehören einerseits geometrische Imperfektionen wie Vorkrümmungen, planmässige oder unplanmässige Endexzentrizitäten und Abweichungen der Stabachse von der theoretischen Systemlinie, sowie Variationen im Querschnitt (Abmessungen). Andererseits sind strukturelle Imperfektionen wie z. B. die Schnittart und die Variation der mechanischen Eigenschaften (Biege- und Druckfestigkeit, Elastizitätsmodul) im Querschnitt zu berücksichtigen.

Stabilität – Ein Problem im Holzbau?

Bilder und Beschreibungen zu Fällen von Stabilitätsversagen bei Holzbauten zu finden, ist schwierig. Nachfolgend sind fünf Beispiele in Bildform dargestellt.



Bild 9: Knicken eines Druckstabes in einem Raumfachwerk anlässlich eines Belastungsversuches (Bild: ETH Zürich).



Bild 10: Dachverband mit zu geringer seitlicher Steifigkeit (Bild: Internet).



Bild 11: Seitliches Ausweichen einer Torwand (Bild: Internet).



Bild 12: Seitliches Ausweichen einer Innenwand (Bild: [2]).



Bild 13: Instabilität einer tragenden Wand eines Riegelbaus in Colmar, F (Bild: Empa).

Aus dem Fehlen von Bildern bzw. Informationen zu Stabilitätsversagen bei Holzbauwerken zu schliessen, die Stabilität sei von untergeordneter Bedeutung, wenn es um die Tragsicherheit von Holztragwerken geht, ist jedoch falsch. Die Arbeitsgruppe 1 „System Identification and Exposures“ der 2006 gestarteten COST Aktion E55 „Modelling of the Performance of Timber Structures“ (www.cost-e55.ethz.ch) widmet sich u. a. der Studie von Ursachen des Versagens von Holztragwerken in Europa. Eine dort präsentierte, 2006 begonnene Untersuchung der Universität Karlsruhe [3] zur Schadensursache und Standsicherheit bestehender Holztragwerke in Deutschland belegt, dass nur ein geringer Teil der beurteilten Holztragwerke (17%) eine ausreichende Stabilität aufweist (Bild 14). Gemäss einer ebenfalls im Rahmen der COST-Aktion E55 diskutierten Arbeit von schwedischen und finnischen Forschern [4] beträgt der Anteil von stabilitätsbedingten Schäden an Holztragwerken 30% (Bild 15)!

Zustand von 105 Tragwerken in Bezug auf Stabilität

- kritisch
- Bauteilversagen mit Einsturz
- Bauteilbruch ohne Einsturz
- ▨ Tragwerkseinsturz
- ▨ stabil
- ▨ stabil nach Instandsetzung
- keine Angaben

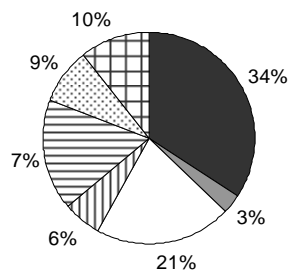


Bild 14: Stabilität von bestehenden Holztragwerken in Deutschland, nach [3].

Ursachen von 127 Schäden an Bauwerken

- Instabilität des Gesamttragwerks
- Biegebruch
- Zugbruch senkrecht zur Faser
- ▨ Schubbruch
- ▨ Trocknungsrisse
- ▨ übergrosse Verformung
- ▨ Zugbruch
- Korrosion von Verbindern, Fäulnis
- Lösen von Verbindern
- ▨ Druckversagen von Einzelbauteilen
- ▨ andere / unbekannt

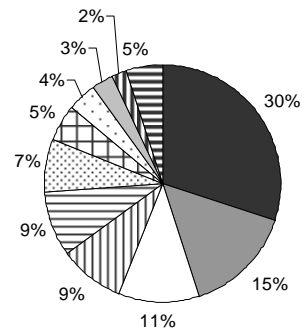


Bild 15: Einsturzursachen von 127 Holztragwerken in Nordeuropa, nach [4].

Die Deutsche Studie ortet einen Grossteil der Schadensursachen in mangelhafter Bemessung (18% der Fälle) oder Konstruktion (31% der Fälle). Die Nordische Studie fasst diese beiden Ursachentypen zusammen und kommt auf einen Anteil von 53%. Mangelhafte Aussteifung bzw. Versagen von Aussteifungselementen war hier in 30% der Fälle Ursache von Schäden oder Einstürzen.

Folgende Überlegungen unterstreichen zusätzlich die Bedeutung der Stabilität im Rahmen der Tragsicherheit von Holztragwerken:

- Holz weist bei einer hohen spezifischen Festigkeit parallel zur Faser einen geringen E-Modul auf, wie folgender Vergleich mit dem Baustoff Stahl zeigt:

Baustoff	Spezifisches Gewicht	Druckfestigkeit	Spezifische Druckfestigkeit	E-Modul	Spezifischer E-Modul
Bauholz C24 ¹⁾	4.2 kN/m ³ ³⁾	21 N/mm ²	5000 m	11 kN/mm ²	2619 km
BSH GL24h ²⁾	4.2 kN/m ³ ³⁾	24 N/mm ²	5714 m	11.6 kN/mm ²	2762 km
Baustahl S235	78.5 kN/m ³	235 N/mm ²	2994 m	210 kN/mm ²	2675 km

¹⁾ gemäss EN 338 [5]

²⁾ gemäss EN 1194 [6]

³⁾ Mittelwert

- Gegeben durch die natürliche Struktur des Holzes (Baumstamm) wird mit Holz v. a. stabförmig gebaut. Stabwerke sind auf Grund der oft hohen, in den Stäben auf vergleichsweise geringen Querschnitten wirkenden Kräfte, deutlich anfälliger auf Stabilitätsversagen, denn flächige Tragwerke wie Platten und Scheiben.
- Im Vergleich zu industriell hergestellten Baustoffen, wie z. B. Stahl, sind die strukturellen Imperfektionen im Holz deutlich grösser. Festigkeits- und Steifigkeitsvariationen in Querschnitt und Länge bewirken unregelmässige Kräfteverläufe. Auch wenn bei der konstruktiven Auslegung der Tragwerke auf eine saubere Zentrierung der Kräfte in Stabachsen und Anschlüssen geachtet wird, sind auf Grund der strukturellen Imperfektionen trotzdem stets exzentrisch wirkende innere Kräfte vorhanden.
- Anschlüsse und Verbindungen in Holztragwerken weisen je nach Ausbildungsart unterschiedliche Schlupfmasse und Anschlusssteifigkeiten auf. Diese Verformungsanteile beeinflussen die Gesamtsteifigkeit des Tragwerks und müssen bei Stabilitätsberechnungen berücksichtigt werden, auch wenn sie zahlenmässig oft schwierig festzulegen sind. In solchen Fällen können Grenzwertbetrachtungen (gelenkiger Anschluss, biege-steifer Anschluss) helfen.
- Auch bei der üblichen Ausführung von Holztragwerken mit Baustoffen definierter Festigkeitsklasse (z. B. Vollholz C24, BSH GL 24h) muss beachtet werden, dass es sich bei den in den Normen angegebenen Elastizitätsmoduln in der jeweiligen Festigkeitsklasse nur um Mittelwerte handelt. Der Variationskoeffizient des Elastizitätsmoduls beträgt, berechnet aus den Angaben in der EN 338, 20% [5]. Diese Variation wurde auch in Versuchen festgestellt [7].
- Sämtliche mechanischen Holzeigenschaften, auch der E-Modul und die Druckfestigkeit sind im Bereich unterhalb der Fasersättigung abhängig von der Holzfeuchte. Bei höheren Holzfeuchten (Feuchteklassen 2 bzw. 3 gemäss Norm SIA 265 [8]) sind die Bemessungswerte der Festigkeit mit den Beiwerten $\eta_w = 0.8$ bzw. 0.6 und die Elastizitätsmoduln mit $\eta_w = 0.9$ bzw. 0.75 abzumindern. Eine falsche Beurteilung der am Einsatzort des Holzes zu erwartenden Holzfeuchte oder eine Nutzungsänderung mit einhergehender Holzfeuchtezunahme im Tragwerk führen daher zu einer Erhöhung der Gefahr des Tragwerksversagens.
- Unter ständiger und quasi-ständiger Last kriecht Holz. Dies führt zu bleibenden Verformungen bei Biegeträgern und bei Lasteinleitungen (Querdruck). Solche Verformungen können bewirken, dass ursprünglich zentrisch beanspruchte druckbeanspruchte Bauteile auf einmal exzentrisch beansprucht werden, was die Gefahr des Stabilitätsversagens erhöht. Dieses Phänomen kann im Übrigen auch bei hoch beanspruchten Stützen unter Biegung und Normalkraft auftreten. Gepaart mit erhöhter oder falsch eingeschätzter Holzfeuchte können die Folgen fatal sein.

- Stabilitätsversagen tritt meist ohne Vorankündigung schlagartig ein. Kombiniert mit dem spröden Versagen des Baustoffs Holz ist dies eine massgebliche Gefährdung von Holztragwerken, welcher durch adäquate Bemessung und Tragwerksaussteifung zu begegnen ist.
- Die geringe Masse des Baustoffs Holz ermöglicht den Bau von weitgespannten, leichten Tragwerken. Solche Tragwerke sind bezüglich Stabilitätsversagen heikler als gedrungene, massive Tragwerke. Auf Grund der geringen Eigenmasse des Holzes können Holztragwerke einen vergleichsweise hohen Nutzlastanteil tragen. Nutzlasten sind jedoch auf Grund ihres variablen Charakters zahlenmässig schwieriger festzulegen und zu kontrollieren als Eigen- und Auflasten. Falsche Lastannahmen oder Lastzunahmen bei Umnutzungen wirken sich daher stark auf die Stand- und Tragsicherheit von Holzbauten aus. Die Leichtbauweise führt auch zu grösseren Verformungen bei horizontal wirkenden Kräften, wie z. B. Windlasten oder Erdbebenkräften. Der horizontalen Aussteifung von Holztragwerken wird allerdings oft nicht die notwendige Beachtung geschenkt.
- Die einfache Bearbeitbarkeit von Holz mit leichten Maschinen erleichtert den Umbau von Holzbauwerken im Rahmen von Umnutzungen. Dieser Vorteil der Holzbauweise gegenüber anderen Bauweisen kann jedoch nur dann genutzt werden, wenn während und nach einem Umbau ausreichend Aussteifungselemente (Verbände, Scheiben, Halterungen von Druckstäben, Kippsicherungen) vorhanden sind, welche die Stabilität des Tragwerks gewährleisten.

Fazit:

Die ausreichende Stabilität und Standsicherheit von Holztragwerken kann durch eine fachgerechte Tragwerkskonzeption und durch eine normenkonforme Bemessung unter Beachtung aller relevanten Einflussgrössen (Holzfeuchte, Kriechen, Variation der mechanischen Eigenschaften, Imperfektionen, etc.) gewährleistet werden. Die Anordnung von stabilisierenden Elementen (Verbände, Scheiben, Halterungen, Abstützungen, Aussteifungen) muss frühzeitig in die Planung einfließen, um letztlich ein befriedigendes Tragwerksverhalten mit gleichzeitig nutzergerechter Konstruktion (Nutzungsanforderungen, Ästhetik, etc.) zu erhalten.

Beispiele zur Systemstabilität

Das Stabilitätsversagen von Tragsystemen wird nachfolgend anhand zweier anschaulicher Beispiele erläutert. Betrachtet werden dabei sich rein elastisch verhaltende Systeme ohne strukturelle und geometrische Imperfektionen. Die Stäbe weisen konstante Biegesteifigkeiten EJ auf und die Kräfte greifen (zentrisch) in den Stabachsen (Massenmittelpunkte) an.

Beispiel 1: Kombination von kurzer und langer Pendelstütze

Betrachtet werden 2 Fälle eines Druckstabs, zusammengesetzt aus einer Pendelstütze und einer eingespannten gemäss Bild 16. Gesucht ist für beide Fälle die massgebende kritische Systemlast $N_{cr,sys}$ des Systems. Zunächst soll eine Untersuchung am linear-elastischen System erfolgen, dann unter Berücksichtigung der (nicht-linearen) Zunahme der Verformungen infolge wirkender Normalkraft (Einfluss 2. Ordnung).

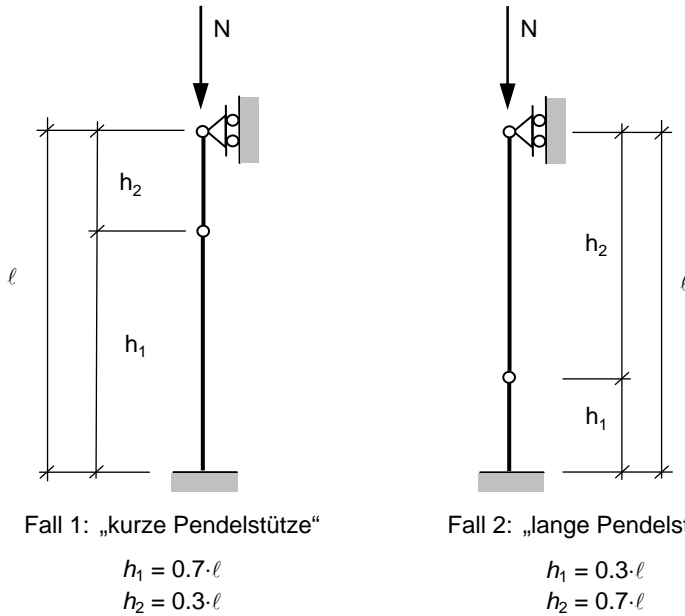


Bild 16: Druckstab zusammengesetzt aus einer Pendelstütze und einer eingespannten Stütze.

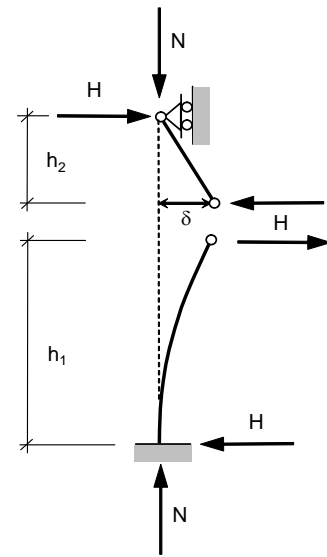


Bild 17: Tragsystem für Beispiel 1, Fall 1: verschobene Lage mit angreifenden Kräften

Berechnung 1. Ordnung (Formulierung des Gleichgewichts am unverformten System)

Infolge der wirkenden Normalkraft N beginnt das Tragsystem, wie in Bild 17 gezeigt, seitlich auszuweichen. Für eine horizontale Verschiebung δ auf der Höhe des Gelenks kann die dazu nötige Horizontalkraft H aus dem Kräftegleichgewicht in Horizontalrichtung berechnet werden:

Verformung Pendelstütze unten: $\delta = \frac{h_2 \cdot H}{N}$ (3) bzw. $H = \frac{N \cdot \delta}{h_2}$ (4)

Verformung eingespannte Stütze oben: $\delta = \frac{H \cdot h_1^3}{3EJ}$ (5) bzw. $H = \frac{3EJ \cdot \delta}{h_1^3}$ (6)

Gleichsetzen der Formeln (4) und (6) liefert die kritische Last 1. Ordnung $N_{cr,sys}$, bei welcher das Druckstabsystem versagt:

$$N_{cr,sys} = 3EJ \cdot \frac{h_2}{h_1^3} \tag{7}$$

Numerisch ausgewertet erhalten wir für:

Fall 1: $N_{cr,sys} = \frac{3EJ \cdot 0.3\ell}{0.7^3 \cdot \ell^3} = 2.62 \cdot \frac{EJ}{\ell^2}$ (8) d. h. eine Knicklänge von $\ell_k = 1.94 \cdot \ell$ (9)

Fall 2: $N_{cr,sys} = \frac{3EJ \cdot 0.7\ell}{0.3^3 \cdot \ell^3} = 77.8 \cdot \frac{EJ}{\ell^2}$ (10) d. h. eine Knicklänge von $\ell_k = 0.36 \cdot \ell$ (11)

Berechnung 2. Ordnung (Formulierung des Gleichgewichts am verformten System)

Durch die Normalkraft (Einfluss 2. Ordnung) vergrößert sich die Verformung δ und Formel (13) muss deshalb mit dem Vergrößerungsfaktor (1) multipliziert werden:

$$\text{Verformung eingespannte Stütze oben: } \delta = \frac{H \cdot h_1^3}{3EJ} \cdot \frac{1}{1 - \frac{N}{N_{cr}}} \quad (12) \quad \text{mit} \quad N_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{(2h_1)^2} \quad (13)$$

Die Horizontalkraft H ergibt sich aus der Formel (12) zu:

$$H = \frac{3EJ \cdot \delta}{h_1^3} \left(1 - \frac{N}{N_{cr}}\right) \quad (14)$$

Gleichsetzen der Formeln (4) und (14) (unter Einsetzung von (13)) liefert die kritische Last 2. Ordnung $N_{cr,sys}$, bei welcher das Druckstabsystem versagt:

$$N_{cr,sys} = \frac{3\pi^2 \cdot EJ \cdot h_2}{12 \cdot h_1^2 \cdot h_2 + \pi^2 \cdot h_1^3} \quad (15)$$

Numerisch ausgewertet erhalten wir für:

$$\text{Fall 1: } N_{cr,sys} = \frac{3\pi^2 EJ \cdot 0.3\ell}{12 \cdot 0.7^2 \cdot 0.3 \cdot \ell^3 + \pi^2 \cdot 0.7^3 \cdot \ell^3} = 1.73 \cdot \frac{EJ}{\ell^2} \quad (16) \quad \text{d. h. } \ell_k = 2.39 \cdot \ell \quad (17)$$

$$\text{Fall 2: } N_{cr,sys} = \frac{3\pi^2 EJ \cdot 0.7\ell}{12 \cdot 0.3^2 \cdot 0.7 \cdot \ell^3 + \pi^2 \cdot 0.3^3 \cdot \ell^3} = 20.3 \cdot \frac{EJ}{\ell^2} \quad (18) \quad \text{d. h. } \ell_k = 0.70 \cdot \ell \quad (19)$$

Zur Kontrolle, ob Systemversagen vor Einzelstabversagen eintritt, müssen noch die Knicklasten der Einzelstäbe errechnet werden:

$$\text{Pendelstütze: } \ell_k = h_2 \quad (20) \quad N_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{h_2^2} \quad (21)$$

$$\text{Eingespannte Stütze: } \ell_k = 2 \cdot h_1 \quad (22) \quad N_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{(2 \cdot h_1)^2} \quad (23)$$

Numerisch ausgewertet erhalten wir für:

$$\text{Fall 1: Pendelstütze: } N_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{0.3^2 \cdot \ell^2} = 109.7 \cdot \frac{EJ}{\ell^2} \quad (24)$$

$$\text{Eingespannte Stütze: } N_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{(2 \cdot 0.7 \cdot \ell)^2} = 5.04 \cdot \frac{EJ}{\ell^2} \quad (25)$$

$$\text{Fall 2: Pendelstütze: } N_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{0.7^2 \cdot \ell^2} = 20.1 \cdot \frac{EJ}{\ell^2} \quad (26)$$

$$\text{Eingespannte Stütze: } N_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{(2 \cdot 0.3 \cdot \ell)^2} = 27.4 \cdot \frac{EJ}{\ell^2} \quad (27)$$

Der Einfluss 2. Ordnung beträgt demzufolge im

$$\text{Fall 1: } \alpha = \frac{2.62}{1.73} = 1.5 \qquad \text{Fall 2: } \alpha = \frac{77.8}{20.3} = 3.8 \qquad (28)$$

Zur besseren Übersicht werden die erhaltenen Resultate in Tabellenform zusammengestellt:

		Kritische Last N_{cr}		
		Fall 1	Fall 2	
Berechnung 1. Ordnung		2.62	77.8	$\frac{EJ}{\ell^2}$
Berechnung 2. Ordnung	Pendelstütze	109.7	20.1	
	Eingespannte Stütze	5.04	27.4	
	Systemknicken	1.73	20.3	

Aus dem Beispiel lässt sich schlussfolgern:

- Stabilitätsproblemen müssen zwingend unter Berücksichtigung der Verformungen untersucht werden. Linear-elastische Methoden 1. Ordnung sind nicht in der Lage, die massgebenden Systemversagenlasten zu liefern.
- Auf den ersten Blick ähnliche Stabsysteme verhalten sich je nach Lage der Gelenke extrem unterschiedlich. Während im Fall 1 „kurze Pendelstütze“ Systemversagen bei einer geringen Knicklast von $N_{cr,sys} = 1.725 \cdot \frac{EJ}{\ell^2}$ massgebend wird, versagt im Fall 2 „lange Pendelstütze“ die Pendelstütze bei einer bedeutend grösseren kritischen Normalkraft von $N_{cr} = 20.142 \cdot \frac{EJ}{\ell^2}$, bevor es zum Systemversagen kommt. In solchen Fällen ist also stets sowohl die Möglichkeit des Systemversagens, als auch diejenige des Einzelbauteilversagens zu untersuchen.
- Obwohl im Fall 2 „lange Pendelstütze“ der Einfluss 2. Ordnung mehr als doppelt so gross ist, wie im Fall 1 „kurze Pendelstütze“, weist das Druckstabsystem im Fall 2 die mehr als 10-fache kritische Last auf. Solche Überlegungen müssen daher unbedingt in die Tragwerkskonzeption einfließen.

Beispiel 2: Gelenkrahmensystem mit Verbandskreuz

Ein Gelenkrahmensystem ist mit einem Verbandskreuz ausgesteift (Bild 18). Die äusseren Normalkräfte werden durch kurze Pendelstützen in die Rahmenstiele eingeleitet. Die Stützen des Rahmens und der Riegel sind im Vergleich zu den Diagonalen sehr massiv ausgebildet (Annahme: $A \approx \infty$). Die Diagonalen bestehen aus Rundstahl mit Durchmesser 20 mm und wirken nur auf Zug. Gesucht ist die Knicklast N_{cr} , bei welcher das Tragsystem versagt.

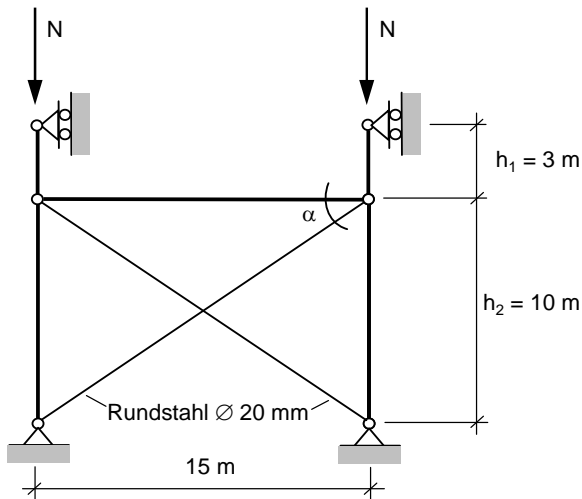


Bild 18: Tragsystem für Beispiel 1: Ausgangslage.

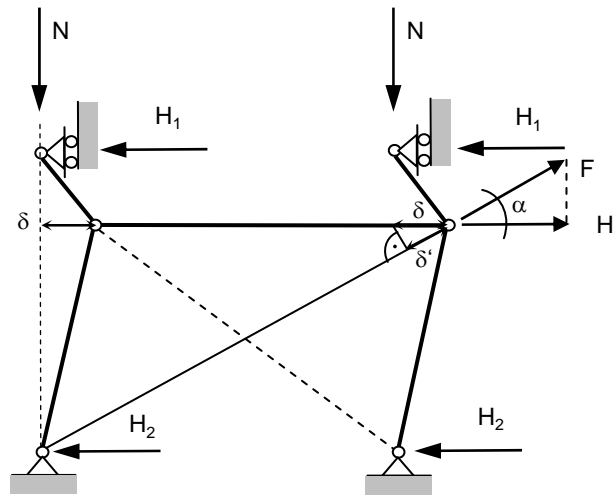


Bild 19: Tragsystem für Beispiel 1: verschobene Lage.

Infolge der wirkenden Normalkraft N beginnt das Tragsystem, wie in Bild 19 gezeigt, seitlich auszuweichen. Für eine Verschiebung δ im Riegel kann die dazu nötige Horizontalkraft H aus dem Kräftegleichgewicht in Horizontalrichtung berechnet werden:

$$H = 2(H_1 + H_2) \quad (29)$$

$$H_1 \cdot h_1 = N \cdot \delta \quad (30)$$

$$H_2 \cdot h_2 = N \cdot \delta \quad (31)$$

$$H = 2 \cdot N \cdot \delta \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) \quad (32)$$

Die Horizontalverschiebung δ bewirkt eine Längenzunahme δ' in der Zugdiagonalen. Die Druckdiagonale wirkt auf Grund geringer Eigensteifigkeit nicht mit. In Abhängigkeit der Diagonalensteifigkeit $E \cdot A$ und der Diagonalenlänge ℓ_D berechnet sich δ' zu:

$$\delta' = \frac{F}{E \cdot A} \cdot \ell_D \quad \text{mit } F = \frac{H}{\cos \alpha} \quad \text{und } \delta' = \delta \cdot \cos \alpha \quad (33)$$

Für die Horizontalkraft H gilt auf Basis der Diagonalenverformung demzufolge:

$$H = E \cdot A \cdot \delta \cdot \cos^2 \alpha \cdot \frac{1}{\ell_D} \quad (34)$$

Durch Gleichsetzen der Formeln (32) und (34) erhält man:

$$N = \frac{h_1 \cdot h_2}{h_1 + h_2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{E \cdot A}{\ell_D} \cdot \cos^2 \alpha \quad (35)$$

Für die in Bild 18 vorgegebene Geometrie und Materialisierung errechnet sich die kritische Normalkraft N_{cr} des Systems zu:

$$N_{cr} = \frac{3 \text{ m} \cdot 10 \text{ m}}{3 \text{ m} + 10 \text{ m}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{210 \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2} \cdot \pi \cdot 0.25 \cdot 20^2 \text{ mm}^2}{\sqrt{15^2 + 10^2} \text{ m}} \cdot \cos^2 \left(\arctg \frac{10}{15} \right) = 2923 \text{ kN} \quad (36)$$

Aspekt Robustheit

Weil Stabilitätsversagen schlagartig, ohne vorherige Ankündigung auftreten kann, sind robuste Tragwerke zu bevorzugen. Unter Robustheit versteht man die Fähigkeit eines Tragwerks und seiner Bauteile, Schädigungen oder ein Versagen auf Ausmasse zu begrenzen, die in einem vertretbaren Verhältnis zur Ursache stehen [9]. Anzustreben ist also die Verhinderung progressiven Versagens ganzer Tragwerke. Hierbei spielen Aussteifungselemente und Verbände eine zentrale Rolle.

Die Norm SIA 265 [8] fordert zur Sicherstellung einer angemessenen Robustheit von Holztragwerken entsprechende konzeptionelle Massnahmen, u. a. die günstige Anordnung räumlicher Aussteifungen, die Wahl von auf Teilausfall unempfindlicher Tragsysteme und die Gewährleistung einer niedrigen Holzfeuchte während der geplanten Nutzungsdauer. Ausserdem soll durch Parallelschaltung (Anordnung geeigneter Koppelungselemente bzw. Verbindungen) eine weitgehende Mitwirkung aller Bauteile bis zum Versagen des Gesamttragwerks angestrebt werden. Der grossen Streubreite der Holzeigenschaften und eventuellen Ausreissern in den mechanischen Eigenschaften kann so adäquat begegnet werden. Die Norm weist auch explizit auf die Gefahr übermässiger Verformungen insb. bei Beanspruchung senkrecht zur Faser hin, mit möglicher ungünstiger Beeinflussung verformungsempfindlicher Konstruktionen.

Literatur

1. Hirt M. A., Bez R., Nussbaumer A. (2007): Stahlbau Grundbegriffe und Bemessungsverfahren. Ppur, Lausanne.
2. Colling F., Müller T. (2000): Lernen aus Schäden im Holzbau Teil A: Ursachen und Vermeidung Teil B: Typische Beispiele. DGfH, München.
3. Frese M., Blass H. J. (2007): Failure analysis on timber structures in Germany - A contribution to COST Action E55. Graz University of Technology, Austria.
4. Frühwald E., Toratti T., Thelandersson S., Serrano E., Emilsson A. (2007): Design of safe timber structures - How can we learn from structural failures in concrete, steel and timber? Report TVBK-3053. Lund Institute of Technology, Division of Structural Engineering, Lund, Sweden.
5. CEN (2003): EN 338: Bauholz für tragende Zwecke - Festigkeitsklassen. Europäisches Komitee für Normung, Brüssel, Belgien.
6. CEN (1999): EN 1194: Holzbauwerke - Brettschichtholz - Festigkeitsklassen und Bestimmung charakteristischer Werte. Europäisches Komitee für Normung, Brüssel, Belgien.
7. Steiger R., Arnold M. (2007): Strength grading of Norway spruce structural timber: revisiting property relationships used in EN 338 classification system. Wood Science and Technology. Published online (10.1007/s00226-00008-00221-00226).
8. SIA (2003): Norm SIA 265 - Holzbau. Schweizerischer Ingenieur- und Architekten-Verein SIA, Zürich, Schweiz.
9. SIA (2003): Norm SIA 260: Grundlagen der Projektierung von Tragwerken. Schweizerischer Ingenieur- und Architekten-Verein SIA, Zürich, Schweiz.

